La (in)consistencia de los infinitesimales bernoullianos

Luis Estrada González y María del Rosario Martínez Ordaz
Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM
{loisayaxsegrob, martinezordazm}@gmail.com

Resumen

En este trabajo nos ocupamos de la afirmación de Peter Vickers de que los infinitesimales de Bernoulli y, con ello, toda su versión del cálculo, son inconsistentes. Siguiendo la misma metodología que Vickers usa para evaluar, y rechazar, los cargos de inconsistencia contra el cálculo de la primera época, evaluamos su propio cargo de inconsistencia contra el cálculo de Bernoulli. Argumentaremos que el Postulado I de Die Differentialrechnung*, la proposición en la que se centra Vickers, no es una contradicción explícita ni nos conduce a una sin ciertos supuestos debatibles, por lo que la teoría formal del cálculo de Bernoulli no necesariamente tendría que ser inconsistente. También argumentaremos que la relatividad de la inconsistencia a una lógica y la falta de evidencia histórica también impiden afirmar que la justificación bernoulliana de su cálculo sea inconsistente, por lo que Vickers no tiene elementos suficientes para catalogar el cálculo de Bernoulli como inconsistente.*

1. Introducción

En este trabajo abordamos la pregunta de si los infinitesimales tal y como los caracteriza Johann Bernoulli en *Die Differentialrechnung* son inconsistentes. Responder a tal interrogante es importante no solamente por el valor historiográfico del estudio de caso, sino también por el impacto que tiene la supuesta caracterización de Bernoulli de los infinitesimales tanto en la metodología como en la filosofía de la ciencia. Por un lado, algunos filósofos y lógicos de la ciencia han sugerido que las inconsistencias se toleran en el razonamiento científico sin la necesidad de que esto sea sinónimo de desastre; en particular, algunos de los defensores de tal tesis han sostenido también que las interpretaciones del cálculo de, al menos, Bernoulli, Leibniz y Newton son inconsistentes pero no explosivas (véase por ejemplo [3]). Por otro lado, una acusación frecuente contra esta tradición es la de forzar la evidencia histórica para apoyar sus tesis sobre la tolerancia a la inconsistencia a través de reconstrucciones racionales poco fieles a la historia de la ciencia. Por tanto, creemos que responder a este cuestionamiento nos permitirá reconocer criterios metodológicos importantes que deben ser respetados al analizar inconsistencias similares a la que se le atribuye a Bernoulli, y al mismo tiempo nos permitirá ya sea apoyar o debilitar las tesis relacionadas con la tolerancia a la inconsistencia.

El caso de Bernoulli es interesante porque incluso Peter Vickers [8], probablemente el desmitificador más meticuloso de supuestos casos de inconsistencias en la historia de la ciencia, sostiene que los infinitesimales bernoullianos son inconsistentes y que Bernoulli estaba de hecho comprometido con su existencia. Nuestro objetivo aquí es hacer una pequeña contribución para una historia y una filosofía de la ciencia lógicamente informadas, pues a la pregunta acerca de la consistencia de los infinitesimales bernoullianos respondemos que *pueden no serlo*, ya que las evaluaciones de consistencia son relativas a una lógica que, si bien suele ser la lógica clásica y era ésta –por lo menos el fragmento de orden cero– la dominante en la época de Bernoulli, no es la única para hacer matemática.

Nótese que no nos preguntaremos si Bernoulli de hecho estaba comprometido con la existencia de los infinitesimales como él los definió, si era un instrumentalista con respecto a ellos o si hay que recurrir a otras partes del *corpus* bernoulliano, e incluso de sus interlocutores, para evaluar sus propiedades, incluyendo su consistencia. ésa sería una investigación principalmente histórica, biográfica, mientras que nuestra pregunta es acerca de las propiedades lógicas de los infinitesimales así definidos en la obra referida. No está de más decir que abordar otros infinitesimales, ya sea contemporáneos –como los diversos hiperreales estudiados a partir del trabajo de Abraham Robinson o los nilpotentes del análisis infinitesimal suave– o de la época de Bernoulli –como los de Nieuwenteijt– está fuera del alcance de este texto. Tampoco pretendemos dar una reconstrucción lógica completa del cálculo de Bernoulli sino, siguiendo, la metodología de Vickers, restringirnos solamente a las proposiciones históricamente relevantes para evaluar el cargo de inconsistencia.

El plan del trabajo es como sigue. En la primera sección exponemos la metodología historicista-eliminativista de Vickers y reconstruimos su argumento para decir que el cálculo de la primera época, con excepción del de Bernoulli, no era inconsistente. En la segunda sección, siguiendo la misma metodología, investigamos si la reconstrucción lógica de la afirmación "paradójica" de Bernoulli, el Postulado I de *Die Differentialrechnung*, nos conduce a una contradicción explícita, como piensa Vickers y argumentamos que de hecho no lo hace, a menos que uno suponga que la lógica adecuada para razonar acerca de los infinitesimales sea tal que valga $A \vee \neg A$. Finalmente, en la tercera sección, explotamos el hecho de la relatividad de la inconsistencia a la lógica para argumentar que las justificaciones bernoullianas de su cálculo tampoco permiten afirmar que su cálculo es inconsistente.

2. La inconsistencia del cálculo de la primera época

En "Was the early calculus an inconsistent theory?" ([7]) y después en *Understanding Inconsistent Science*, [8, p. capítulo 6], Peter Vickers ha examinado cuidadosamente la opinión todavía bastante difundida de que el cálculo de la primera época –el de Newton, Leibniz y sus respectivos seguidores, cuyas técnicas se extendieron hasta principios del siglo XIX– era inconsistente. Pero incluso después de argumentar de manera bastante convincente que no era así, Vickers sostiene que Johann Bernoulli sí tenía un compromiso con infinitesimales con propiedades contradictorias, por ejemplo, ser a la vez idénticos y diferentes a 0, y que probablemente era el único en este respecto. La evidencia que Vickers da para ello son afirmaciones "paradójicas" [8, p. 178] de Bernoulli como el Postulado I de *Die Differentialrechnung*: "Una cantidad que aumenta o disminuye infinitesimalmente no aumenta ni disminuye"[1] y sus defensas de la literalidad de afirmaciones como ésta. Antes de pronunciarnos acerca de la postura de Vickers, expondremos la metodología que él utiliza para evaluar las afirmaciones de inconsistencia.

Según Vickers, en debates acerca de la inconsistencia de teorías cientifícas, en lugar de ocuparnos de definir qué es una teoría en general, y qué es "el cálculo de la primera época" en este caso, deberíamos fijarnos sólo en las proposiciones históricamente relevantes para evaluar los cargos de inconsistencia. Esto es lo que Vickers denomina "eliminativismo teórico" [8, p. capítulo 2]. En el caso del cálculo de la primera época, estas proposiciones podrían encontrarse en dos niveles, a saber, el nivel de la *teoría formal* y el nivel de la *justificación*, esto es, el nivel en el que se explica cuáles son los presupuestos conceptuales básicos de la teoría, y con ello cómo y por qué ésta funciona o debería funcionar.

[1] "Eine Grösse, die vermindert oder vermehrt wird um eine unendlich kleinere Grösse, wird weder vermindert noch vermehrt."

El argumento de Vickers para afirmar que el cálculo de la primera época no es inconsistente es como sigue. Si el cálculo es inconsistente, entonces o la teoría formal es inconsistente o la justificación que se da de la teoría formal es exitosa e inconsistente. Pero la teoría formal del cálculo de la primera época es básicamente el siguiente algoritmo [8, p. 150]:
1. Ponga la ecuación en la forma $y = f(x)$.
2. Calcule $\dfrac{f(x+o)-f(x)}{o}$ y simplifique.
3. Remueva cualquier término que sea múltiplo de o.
4. El término resultante entonces es la derivada.[2]
Si este algoritmo es inconsistente es porque o bien contiene reglas autocontradictorias (como "No siga esta regla"), o porque arroja resultados inconsistentes con alguna verdad matemática ya establecida, o porque arroja resultados diferentes usando el mismo procedimiento. Pero nada de esto ocurría con el algoritmo mencionado arriba. Por ejemplo, quienes pretendían haber obtenido algún resultado inconsistente con alguna verdad matemática establecida aplicaron incorrectamente el algoritmo en algún punto. De este modo, la teoría formal no es inconsistente, así que, para que el cálculo de la primera época fuera inconsistente, alguna de las justificaciones exitosas del algoritmo tendría que serlo.

Para Vickers, una justificación exitosa del cálculo de la primera época es una justificación de los pasos del algoritmo, y sus relaciones con otras áreas de la matemática ya establecida, aceptada por la comunidad pertinente como verdadera o, por lo menos, como "candidata a la verdad". Sin embargo, según Vickers, muchas de las justificaciones ofrecidas ni siquiera eran consideradas exitosas, sino meramente buenas heurísticas o "ficciones útiles" –por ejemplo, muchas de las que recurrían a infinitesimales. Otras ni siquiera eran justificaciones, sino meras exposiciones del algoritmo; por último había justificaciones que sí eran aceptadas por varios matemáticos como "candidatas a la verdad" (las explicaciones en términos de fluxiones u otras cinemáticas, o las que recurrían a infinitesimales pero como cantidades variables), pero no eran exitosas en el sentido de que no fueron aceptadas por toda la comunidad pertinente al no explicar convincentemente alguna parte del algoritmo o de sus conexiones con otras áreas de la matemática ya establecida. Sin embargo, no toda explicación fallida es inconsistente: bien puede ser incompleta o incoherente.

Así, si ni la teoría reconstruida lógicamente ni las justificaciones exitosas eran inconsistentes, no hay razones para decir que el cálculo de la primera época es inconsistente. La única excepción para Vickers es Johann Bernoulli, pues él "sobresale al hacer el compromiso explícito más fuerte con un conjunto de supuestos inconsistentes" [8, p. 147]; "él [Johann Bernoulli] razonaba*como si* creyera en infinitesimales autocontradictorios porque *de hecho* creía en infinitesimales autocontradictorios" [8, p. 183] y "Bernoulli, al creer dos conyuntos inconsistentes en momentos ligeramente diferentes, está comprometido a creer la conjunción completa en un mismo momento" [8, p. 185], con lo que "[a]quí tenemos lo que seguramente es una de las posiciones más radicales en la historia de la ciencia y las matemáticas: parece que Bernoulli acepta muy claramente una contradicción obvia." [8, p. 178] Sin embargo, siguiendo su propia metodología, Vickers tendría que mostrarnos que o bien la reconstrucción lógica de la teoría de Bernoulli o bien su justificación para la teoría son inconsistentes. En la siguiente sección veremos que la reconstrucción lógica de los infinitesimales bernoullianos no necesariamente es inconsistente.

[2] O, en una sola oración: si calculamos $\dfrac{f(x+o)-f(x)}{o}$ para cualquier función $y = f(x)$ y donde o es una constante numérica y se elimina cualquier término remanente que sea múltiplo de o, entonces tenemos la derivada. [8, p. 154]

3. Una formalización del Postulado I

Vickers [8, p. 185] considera una manera en la que los infinitesimales bernoullianos supuestamente contradictorios no trivializarían la teoría al restringir la validez de algunos principios lógicos. Para esto, al principio de una derivación se valdría el paso de

El infinitesimal es igual a cero y distinto de cero.

a

Por eliminación de la conjunción, el infinitesimal es distinto de cero.

y al final de una derivación, el paso que se valdría sería

El infinitesimal es igual a cero y distinto de cero.
Entonces, por eliminación de la conjunción, el infinitesimal es igual a cero.

Vickers cree que esto es problemático, pues no sólo se requeriría que la lógica fuera paraconsistente para no trivializar la teoría a partir del supuesto inicial, que el infinitesimal es igual a cero y distinto de cero, sino que se requeriría una lógica muy complicada para permitir sólo ciertas eliminaciones de la conjunción en determinados pasos de una derivación.

Sólo queremos notar que en principio no es tan descabellado usar los pasos que Vickers menciona como parte del algoritmo del cálculo. En lógicas de la relevancia, hay conjunciones que funcionan como fusiones y que tienen una eliminación de la conjunción más estricta:

A y B; A implica que B implica C
C, por eliminación de la conjunción (cf. [5])

Entonces, un condicional estricto apropiado, como "A implica que $\neg A$ implica $\neg A$", ayudaría a justificar la eliminación en el primer paso y, *mutatis mutandis*, algo similar podría pasar para el segundo.

Sin embargo, hay opciones lógicas menos enrevesadas para entender los infinitesimales de Bernoulli que ni siquiera requieren considerarlos como inconsistentes. Recordemos el Postulado I de Bernoulli: "Una cantidad que aumenta o disminuye infinitesimalmente no aumenta ni disminuye". Pero, ¿esto es una contradicción? Nótese que el postulado no dice

Para todo número x y todo infinitesimal ε, εx y no εx.

pues el enunciado tiene claramente una naturaleza condicional: si la cantidad se aumenta (o disminuye) infinitesimalmente, no aumenta (ni disminuye). Así, otra lectura podría ser

Para todo número x y todo infinitesimal ε, si εx entonces no εx.

lo que ni siquiera tiene sentido, pues uno no niega términos, como son el resultado de operaciones como el producto, y la primera paráfrasis que dimos también tenía éste problema: uno no conjunta términos.

Otra paráfrasis sería:

Para todo número x y todo infinitesimal ε, $(\varepsilon x = x)$.

Esto no es una contradicción, y parece respetar el espíritu del postulado de Bernoulli: una cantidad x que varía infinitesimalmente (εx) no varía, es igual a sí misma (x). Sin embargo, arriba dijimos que el enunciado tiene una naturaleza condicional, que no está expuesta en la paráfrasis recién dada. Esto puede solucionarse así:

Para todo número x, todo número y y todo infinitesimal ε, si $\varepsilon x = y$ entonces $x = y$.

Esto es casi el *principio de microcancelación* del análisis infinitesimal suave (cf. [1, p. capítulos 1, 2, 7 y 8]), sólo tendríamos que haber escrito '$\varepsilon x = \varepsilon y$' en lugar de '$\varepsilon x = y$'. Dado que el postulado de Bernoulli implica el principio de microcancelación –sólo instánciese 'y' por 'εy'–, aquel también es incompatible con la lógica clásica, en particular con $A \vee \neg A$.

Así, si la proposición históricamente relevante para evaluar la inconsistencia en el caso de Bernoulli es el Postulado I, la teoría formal del cálculo bernoulliano no necesariamente es inconsistente: lo es si la lógica usada para razonar acerca de los infinitesimales tiene que ser una donde valga $A \vee \neg A$.

4. La no inconsistencia de los infinitesimales bernoullianos

Calificar de inconsistentes a los infinitesimales bernoullianos requiere más recursos que los permitidos por la metodología historicista-eliminativista que Vickers se autoimpone. Vickers parece suponer que la única proposición históricamente relevante en el caso de Bernoulli es el Postulado I. Podemos conceder eso. Enseguida, Vickers debió habernos mostrado que o bien la teoría formal del cálculo de Bernoulli es inconsistente, o que su justificación del mismo es inconsistente. Pero, poniendo más atención en la formalización del Postulado I, vimos que no es una contradicción explícita. Una lección importante de lo expuesto en la sección previa es que, como han enfatizado autores recientes (cf. [6]), la consistencia es relativa a una lógica dada. Sin asumir la lógica clásica, el Postulado I no necesariamente es inconsistente, en el sentido de que no necesariamente nos conduce a una contradicción explícita. Lo que nos quedaría es investigar si la justificación bernoulliana del cálculo es inconsistente.

Supongamos que Bernoulli haya sido uno de los que "deja la lógica para después" (cf. [4, p. 9]) de su uso del cálculo y su justificación del mismo. Sin el recurso a la lógica intuicionista, lo más probable es que las justificaciones de Bernoulli fueran o bien incompletas, al no poder explicar cómo puede valer su Postulado I sin llegar a resultados falsos como que $1 = 0$, o incoherentes, al sostener afirmaciones del tipo 'Tanto $A \vee \neg A$ como el Postulado I valen para mi cálculo infinitesimal y no llego a resultados falsos como $1 = 0$' sin notar la contradicción y sin aceptarla, pero según Vickers esto sucedía con muchos de los analistas de la primera época. De hecho, al final del capítulo [8, p. 189], Vickers parece reconocer que no hay concordancia entre la práctica de Bernoulli y la justificación que habría dado del cálculo, pero esto mostraría a lo sumo que la justificación dada por Bernoulli es inadecuada, no necesariamente inconsistente. Sin embargo, habría que hacer un estudio más detallado de los escritos de Bernoulli para tener mayor certeza. Así pues, Vickers no ha dado elementos suficientes para afirmar que el cálculo de Bernoulli es inconsistente.

5. Conclusiones

En este trabajo nos preguntamos si, como sostiene Vickers, los infinitesimales de Bernoulli son inconsistentes y, con ello, toda su versión del cálculo. Expusimos la metodología que Vickers usa para evaluar los cargos de inconsistencia contra el cálculo de la primera época y la adoptamos para evaluar su propio cargo de inconsistencia contra el cálculo de Bernoulli. Encontramos que la proposición que Vickers juzga históricamente relevante, el Postulado I de *Die Differentialrechnung*, no es una contradicción explícita ni nos conduce a una sin ciertos supuestos, en particular, que la lógica que tiene que ser la usada para razonar con infinitesimales es una donde valga $A \vee \neg A$, por lo que la teoría formal del cálculo de Bernoulli no necesariamente tendría que ser inconsistente. La relatividad de la inconsistencia a la lógica y la falta de evidencia histórica también impiden afirmar que la justificación bernoulliana de su cálculo sea inconsistente, por lo que Vickers no tiene elementos suficientes para catalogar a Bernoulli como un caso especial, en cuanto la inconsistencia se refiere, entre los analistas de la primera época.[3]

[3]Este trabajo fue realizado gracias al apoyo del proyecto PAPIIT IA401015 "Tras las consecuencias. Una visión universalista de la lógica (I)". El autor quiere agradecer además al proyecto Conacyt CCB 2011 166502 "Aspectos filosóficos de la modalidad"; la autora, al proyecto PAPIIT IN400514 "Lógicas del descubrimiento, heurística y creatividad en las ciencias". Queremos agradecer al Grupo de Lectura de Filosofía de la Ciencia del Instituto de

Referencias

[1] BELL, J. L. (1998). *A Primer of Infinitesimal Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.

[2] BERNOULLI, J. (1691/92-1924). *Die Differentialrechnung. Von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1691/92*, número 211 de Oswalds Klassiker der Exakten Wissenschaften.

[3] BROWN, B. y G. PRIEST (2004). Chunk and permeate, a paraconsistent inference strategy. Part I: The infinitesimal calculus. *Journal of Philosophical Logic*, 33, 379–388.

[4] HEAVISIDE, O. (1899). *Electromagnetic Theory Vol. 2*. London: 'The Electricist' Print. and Publ. Co.

[5] MARES, E. (2012). Relevance and conjunction. *Journal of Logic and Computation*, 22, 7–21.

[6] SHAPIRO, S. (2014). *Varieties of Logic*. Oxford: Oxford University Press.

[7] VICKERS, P. (2007). Was the early calculus an inconsistent theory? Typescript available at the PhilSci Archive: http://philsci-archive.pitt.edu/3477/

[8] VICKERS, P. (2013). *Understanding Inconsistent Science*. Oxford: Oxford University Press.

Investigaciones Filosóficas de la UNAM, en especial a Daniel Garibay García, Mónica Livier Aguilar Martínez y Jorge Alberto Manero Orozco por sus gentiles comentarios al discutir el tema de este trabajo.